Раздел 1. Занятие 1

1° Определение равномерной сходимости.

Сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (1)$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\Pi = \{(x,y): a \le x < +\infty;\ y_1 < y < y_2\}$, называется равномерно сходящимся в интервале $(y_1; y_2)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon)$ такое, что для всех $b \ge B$ имеем:

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad y \in (y_1; y_2).$$

Если интеграл (1) сходится равномерно в интервале $(y_1; y_2)$, то он представляет собой непрерывную функцию параметра y.

2° Критерий Коши.

Для равномерной сходимости интеграла (1) в интервале $(y_1; y_2)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad y_1 < y < y_2$$

если только $b', b'' > B$.

3° Критерий Вейерштрасса.

Для равномерной сходимости интеграла (1) достаточно, чтобы существовала не зависящая от параметра y мажорирующая функция $F(x)$ такая, что:

ⓐ $|f(x,y)| \le F(x)$ при $a \le x < +\infty$;

ⓑ $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$.

4° Аналогичные теоремы имеют место для несобственных интегралов от разрывных функций.

5° Критерии Абеля и Дирихле.

№ 3752. Доказать, что если:

ⓐ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на интервале $(y_1;y_2)$;

ⓑ функция $\varphi(x,y)$ ограничена и монотонна по $x\in[a;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx$ сходится равномерно на интервале $(y_1;y_2)$.

D: Пусть задано $\varepsilon>0$. Согласно критерию Коши существует число $B=B(\varepsilon)$ такое, что для произвольных $B', \xi, B'' > B(\varepsilon)$ независимо от $y\in(y_1;y_2)$ имеют место оценки:

$$\left|\int\limits_{B'}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{и} \quad \left|\int\limits_{\xi}^{B''} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

где $M=\sup\limits_{(x,y)}|\varphi(x,y)|>0$.

Функция $\varphi(x,y)$ монотонна по x, а $f(x,y)$ интегрируема. Поэтому по второй теореме о среднем:

$$\int\limits_{B'}^{B''} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx = \varphi(B'+0,y)\int\limits_{B'}^{\xi} f(x,y)\,dx + \varphi(B''-0,y)\int\limits_{\xi}^{B''} f(x,y)\,dx,$$

где $B'\le\xi\le B''$. Отсюда

$$\left|\int\limits_{B'}^{B''} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\right| \le |\varphi(B'+0,y)|\left|\int\limits_{B'}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| + |\varphi(B''-0,y)|\times$$

$$\times\left|\int\limits_{\xi}^{B''} f(x,y)\,dx\right| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \text{для любого } y\in(y_1;y_2).$$

А это согласно критерию Коши и означает равномерную сходимость интеграла в указанной области. ∎

Доказать, что если:

ⓐ функция $\varphi(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ и любого $y\in(y_1;y_2)$

и монотонна по x, $x \in [a; +\infty)$;

б) первообразная $\int\limits_a^x f(z,y)\,dz$, $x \in [a;+\infty)$, $y \in (y_1; y_2)$ ограничена по абсолютной величине константой M.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx$ сходится равномерно на интервале $(y_1; y_2)$.

D: Для произвольных $b', b'' \in (a; +\infty)$ воспользуемся второй теоремой о среднем для интеграла $\int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx$

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx \right| = \left| \varphi(b'+0,y)\int\limits_{b'}^{\xi} f(x,y)\,dx + \varphi(b''-0,y)\int\limits_{\xi}^{b''} f(x,y)\,dx \right| \le$$

$$\le M\left\{ |\varphi(b'+0,y)| + |\varphi(b''+0,y)| \right\}.$$

Поскольку $\varphi(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ равномерно по $y \in (y_1; y_2)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon)$, что

$$|\varphi(b'+0,y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{и} \quad |\varphi(b''-0,y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

при $y \in (y_1; y_2)$ и $b', b'' > B$. Отсюда получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon)$, что

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{для произвольных } y \in (y_1; y_2)$$

и $b', b'' > B$. В силу критерия Коши исходный интеграл сходится равномерно на интервале $(y_1; y_2)$. ∎

6°. Для равномерной сходимости интеграла (1) в интервале $(y_1; y_2)$ необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_y \left| \int\limits_{\eta}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = 0.$$

7°. Равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\,dx \quad ,$$

где $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Класс: №№ 3753, 3754, 3755.1, 3758, 3760, 3762, 3780, 3768

№3753 Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx \quad (0<y<1)$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

Интеграл $L = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ сходится $\Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon>0$ существует $B=B(\varepsilon)$, что $\int_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \varepsilon$. Пусть число A выбрано следующим образом:

$$A > \frac{2L}{\varepsilon} + B(\varepsilon).$$

Тогда выполним замену переменной $t = \frac{1}{y}\left(x-\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx = y\int_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \begin{cases} y\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2Ly < \varepsilon, & \text{если } 0<y<\frac{\varepsilon}{2L} \\ \int_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \int_{A-\frac{2L}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \int_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}dt < \varepsilon, & \text{если } \frac{\varepsilon}{2L} \le y < 1 \end{cases}$$

Из полученных соотношений непосредственно вытекает равномерная сходимость интеграла на $(0;1)$.

Что касается мажорирования, то пусть существует такая функция $F(x)$:

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} \le F(x)$$

Для произвольного x существует $y = \frac{1}{x}$, что $f(x,y) = 1$. Следовательно, $F(x) \ge 1$ для любого x. Значит соответствующий несобственный интеграл расходится.

№3754 Показать, что интеграл $I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx$

ⓐ сходится равномерно в любом промежутке $0<a\le\alpha\le b$;

ⓑ сходится неравномерно в промежутке $0\le\alpha\le b$

В первом случае легко построить мажорирующую функцию $F(x) = be^{-ax}$. Откуда по признаку Вейерштрасса интеграл равномерно сходится. Во втором случае произведем замену переменных $t=\alpha x$, $x>0$ и $\alpha>0$. Получим:

$$\int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-\alpha B}$$

Отсюда следует, что для любого $B>0$ существует α, $\alpha\in(0;b)$, что

$e^{-\alpha B} > \varepsilon$ для $0<\varepsilon<1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0<\alpha<\frac{1}{B}\ln\frac{1}{\varepsilon}$. Это означает, что исходный интеграл сходится неравномерно.

№3755.1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ в следующих промежутках

ⓐ $1<\alpha_0\leq\alpha<+\infty$; ⓑ $1<\alpha<+\infty$.

В первом случае легко можно построить мажорирующую функцию $F(x)=\frac{1}{x^{\alpha_0}}$, несобственный интеграл от которой сходится. Согласно признаку Вейерштрасса это означает равномерную сходимость исходного интеграла. Во втором случае вычислим исходный интеграл $\int\limits_B^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\left(\frac{1}{B}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\alpha-1}\Rightarrow$ Отсюда следует, что для любого $B>1$ существует $\alpha>1$, что $\left(\frac{1}{B}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\alpha-1}>\varepsilon$ для $0<\varepsilon<1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $1<\alpha<\min\left\{1+\frac{1}{2\varepsilon};1+\frac{\ln 2}{\ln B}\right\}$. Это означает, что исходный интеграл сходится неравномерно.

№3758 Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ где $-\infty<\alpha<+\infty$.

Нетрудно заметить, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$

Подинтегральная функция допускает оценку $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2}$ несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ сходится. Поэтому, в силу признака Вейерштрасса, исходный интеграл равномерно сходится для $\alpha\in(1;+\infty)$

№3760 Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ где $(0\leq\alpha<+\infty)$.

Данный несобственный интеграл равномерно сходится на указанной области по признаку Абеля. Поскольку $\int\limits^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ является сходящимся интегралом: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$, а функция $\varphi(\alpha,x)=e^{-\alpha x}$ ограничена и монотонна по x. (см. №2378).

№3762. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx$, где $0\leq\alpha<+\infty$.

Исследование на равномерную сходимость исходного интеграла эквивалетно исследованию сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}dz$. Действительно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx = \left| z=\sqrt{\alpha}\,x \right| = \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}dz$$

сходится при каждом α!

Отрицание определения: $\exists\,\varepsilon\ \forall B\ \exists\, b$ и α

$\int\limits_b^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx = \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}dt > L \Rightarrow \varepsilon\in(0;L)$!

Сходимость последнего следует из оценки $e^{-z^2}\le e^{-z}$ для $z\in[1;+\infty)$

и сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-z}dz$.

$\exists\int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}dt = L$ для $b\sqrt{\alpha}=10^{-1}$

нет равномерной сходимости!

№ 3780 Исследовать на непрерывность следующую функцию

$$F(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx\ ,\quad \alpha>0.$$

Подинтегральная функция $f(\alpha,x)=\frac{\cos x}{x^\alpha}$ непрерывна на множестве $\{(x,\alpha):\ x\in[1;+\infty),\ \alpha\in[-\alpha_0;\alpha_0]\},\ \alpha_0>0$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходится равномерно на интервале $(0;+\infty)$ по признаку Дирихле. Действительно, функция $\varphi(\alpha,x)=\frac{1}{x^\alpha}$ монотонна по x и равномерно стремится к нулю для $\alpha>0$. Кроме того,

$$\left|\int\limits_1^{x}\cos z\,dz\right| = |\sin x-\sin 1|\le 2 \quad \text{для всех } x>1.$$

Это означает, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на интервале $(0;+\infty)$.

№3788 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}\ ,\quad 0<n<2.$$

Сделаем замену переменных $z=\frac{1}{x}\Rightarrow\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin z}{z^{2-n}}dz$

Обозначим $\alpha=2-n$ и $0<\alpha<2\to$ имеем $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin z}{z^\alpha}dz$.

Согласно отрицанию критерия Коши:

существует $\varepsilon_0=1$, что каким бы ни было число $B>1$, для него существуют числа $B',B''>B$ и значение $\alpha\in(0;2)$, что

$$\left|\int\limits_{B'}^{B''}\frac{\sin z}{z^\alpha}dz\right|\ge\varepsilon_0.$$

Воспользуемся первой теоремой о среднем:

$$\left|\int\limits_{B'}^{B''}\frac{\sin z}{z^\alpha}dz\right| = \frac{1}{\xi^\alpha}\left|\int\limits_{B'}^{B''}\sin z\,dz\right|$$

Выберем теперь α, B' и B'' следующим образом:

$\alpha \to +0$

$B' = 2\pi n_0$, $B'' = B' + \pi$, где $n_0 > \left[\frac{B}{2\pi}\right] + 1 \Rightarrow 2\pi n_0 > B$.

Тогда $\left| \int\limits_{B'}^{B''} \sin z\, dz \right| = 2 \Rightarrow \left| \int\limits_{B'}^{B''} \frac{\sin z}{z^{\alpha}} dz \right| \geq \varepsilon_0$.

Значит исходный интеграл сходится неравномерно.

2 способ: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin z}{z^{2-n}} dz$

Для произвольного $B > 1$:

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin z}{z^{2-n}} dz = -\frac{\cos z}{z^{2-n}} \Big|_B^{+\infty} + (2-n) \int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos z}{z^{3-n}} dz = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (2-n) \int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos z}{z^{3-n}} dz$$

Интеграл $\int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos z}{z^{3-n}} dz$ сходится равномерно по признаку Дирихле: функция $f(z) = \cos z$ имеет ограниченную первообразную, а функция $\varphi(z, n) = \frac{1}{z^{3-n}} \leq \frac{1}{z}$ монотонно стремится к нулю равномерно по n.

Для первого слагаемого: для произвольного $B = \mathrm{Const} > 1$ существует $b = 2\pi k > B$ и значение $n \to 2$, что

$$\left| \frac{\cos b}{b^{2-n}} \right| = \frac{1}{(2\pi k)^{2-n}} \to 1$$

Значит $\left| \int\limits_b^{+\infty} \frac{\sin z}{z^{2-n}} dz \right| > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Исходный интеграл сходится неравномерно.